



TITLE:

分岐チャンネルの分流比の決定(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

川口, 光年; 浜野, 明子

CITATION:

川口, 光年 ...[et al]. 分岐チャンネルの分流比の決定(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 189-202

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103331>

RIGHT:

分岐チャンネルの分流比の決定

慶応大物理 川口光年

浜野明子

(Kawaguti Mitutosi, Hamano Akiko)

§ 1. はしがき

血管壁の損傷は血管の狭窄部の下流、分岐地点の近く、大曲率のところに多く発生することが知られている。この原因については、多くの理論的あるいは実験的研究がされたにも係らず、決定的な結論は得られていない。

流体力学の見地から血管壁損傷の原因を探るのがこの一連の数値的研究の目的である。動脈の狭窄後膨張のおこる場合については、2次元モデルについてナビエ・ストークスの方程式を定差法により数値積分を行い、壁面の剪断応力の振幅が膨張がおこる点の近くで異常に大きいことを見出した。¹⁾ 分岐管についても同様の方法で定常流、拍動流を取り扱い同様な結論を得た。²⁾ この際、側管の方に流れる流量の割合、分流比はあらかじめ与え、拍動流の場合でも時間によらず一定とした。しかし、これは、両方の下流部分の長さが十分長

く、全圧力降下のうち分岐部の影響が完全に無視できるような場合に対応する。

分流比は元来、下流の状況によって一義的に、しかも拍動流の場合には時間の関数として決定されるべきものである。生体内の血管については、下流の状態を数量的に把握することは難しいが、血管壁が剛体でなく膨張可能であり、血流の末端で拍動の影響が弱まること等を考えると、分岐部より下流部分の長さが有限であり、分岐した両下流端の圧力が等しいと考えてよいであろう。この報告は、ある特定の分岐、ある特定の下流長の場合について、分流比がどの様に決定できるか、また拍動流の場合に分流比が時間とともにどの様に变化するか、一周期の平均分流比はどの様になるか等を研究した結果である。

§2. 方法

分岐した動脈内の流れを研究するのに2次元モデルを考える。2次元流と3次元流とでは、定量的な違いや2次元などの定性的な差異はあるが、定性的に重要な点では同様であると思われる。また、定差法で数値計算をする際、3次元流では2次元流の少なくとも100倍程度の時間、費用が必要と考えられる。

この研究では流体はニュートン流体と考えるので、みだの幅 H 、上流での平均流速（拍動流では時間的にも平均をとったもの） U_0 を代表的な長さ、速度として無次元化すると、渦度 ω の輸送方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 ψ は流れの関数で、渦度 ω 、 x 、 y 方向の流速 u 、 v は

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

で与えられる。また R はレイノルズ数で、 H 、 U_0 と流体の動粘性率 ν から

$$R = HU_0 / \nu \quad (4)$$

と定義される。

境界条件としては、血管壁は剛体と考えるので

1) 壁面上で流速が 0

となる。上流端、下流端では

2) 定常流の場合、ポアズイユ流から与えられる流れの関数、渦度の分布を使った。

拍動流に対しては

2) 分岐が存在しない時の2次元拍動流に対応する流れの関数、温度の分布を使った。

計算領域として、図1に示した様に、上流側に3単位、(幅が1単位)、各下流側に5単位の長さをとった。方程式(1)、(2)を数値積分するのに定差法を使ったが、網目の大きさは $1/10$ とし、時に $1/20$ の細かい網目を用いた。 Δt は前者の場合0.04、後者の場合0.01とした。

実際の計算順序は

1) 側管への流量 ψ_{sep} を適当に定め、領域内の ψ , ω の値を適当に仮定する。

2) ψ_{sep} を挟んだ $\psi_{sep} \pm \Delta\psi_{sep}$ の2つの場合について、 ψ の値を式(2)を使って反復法(精度 10^{-5})により求める。

3) この ψ の値を使い、各々の場合に、図1のP1, P2に沿う圧力降下を計算する。

4) $\psi_{sep} + \Delta\psi_{sep}$ につりてのP1とP2に沿う圧力降下の

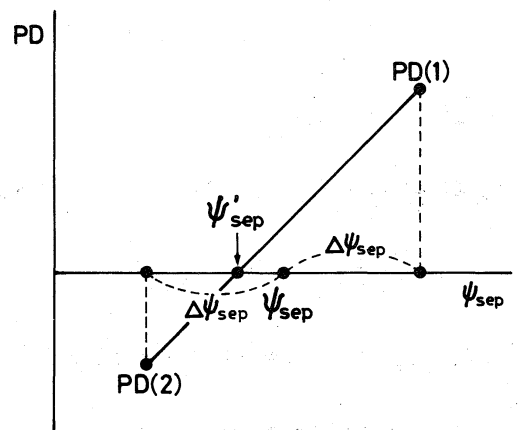
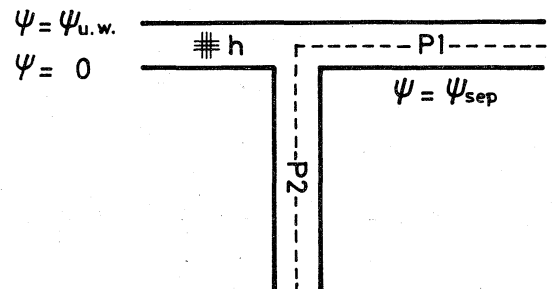


図1 計算領域, ψ_{sep} の内挿

差 $PD(1)$ と, $\psi_{sep} - \Delta\psi_{sep}$ に対する圧力降下の差 $PD(2)$ から

$$\psi'_{sep} = \psi_{sep} - k \left[1 + \frac{2 PD(2)}{PD(1) - PD(2)} \right] \Delta\psi_{sep} \quad (5)$$

により, $P1$, $P2$ に沿う圧力降下が等しくなる様な ψ_{sep} を求め, これに対応する ψ の値を算出する。 k は収束加速係数。

5) 壁面上の ω を式 (2) から求める。

6) 時刻を Δt だけ進める。

7) 式 (1) により次の時刻の ω を求める。

以下は 2) に戻り, この操作を反復し, 十分な収束 (定常流), 十分な周期性 (拍動流) が得られた時計算を終る。

§ 3. 結果

§ 3.1 定常流

この方式の収束性を, $R=32$ の場合に, 格子間隔 h , $\Delta\psi_{sep}$, 収束加速係数 k を変化させて調べた。 k としては $1/10$, $1/20$

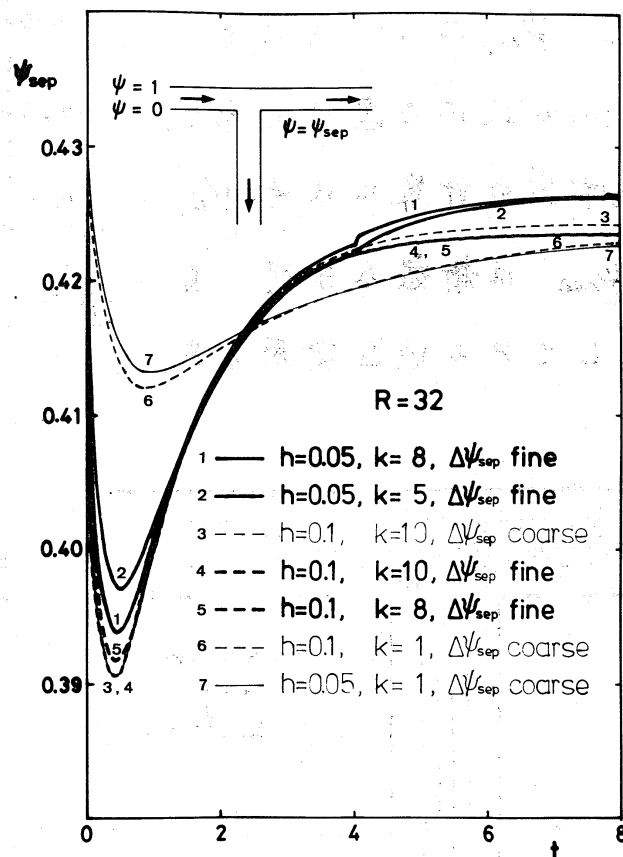
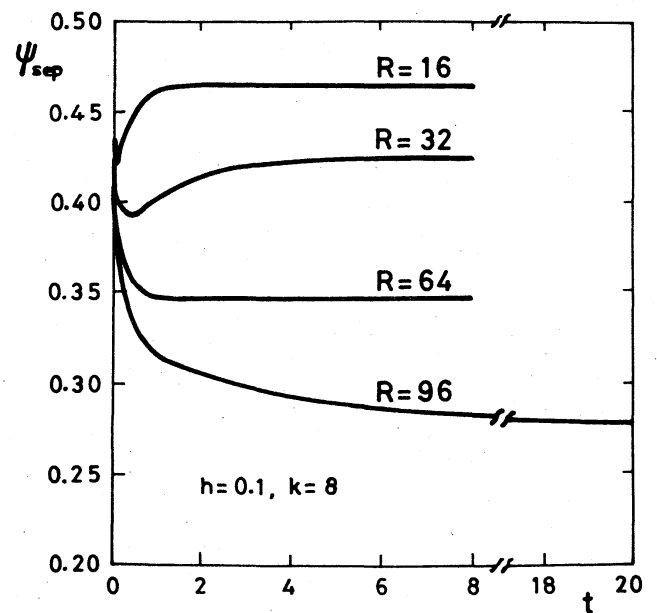
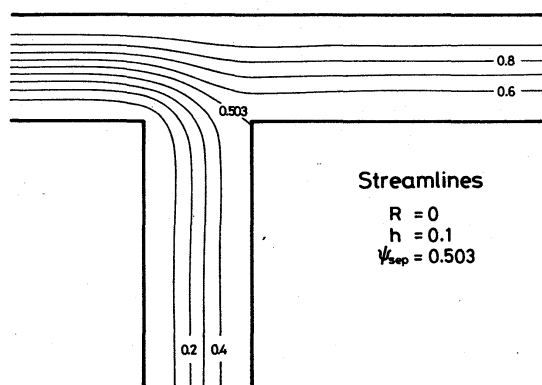
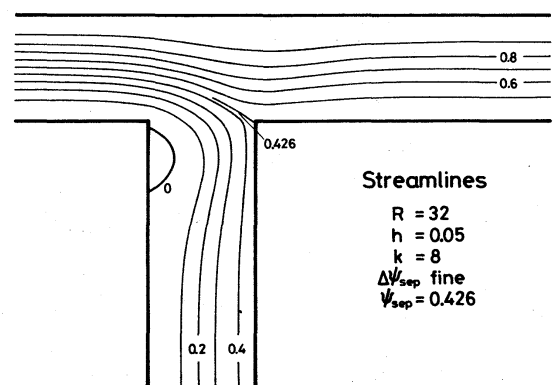


図 2 収束性のチェック ($R=32$)

の2つの値を使った。 $\Delta\psi_{sep}$ は始めは比較的大きく、収束するにつれて小さな値を使用した。粗 ($0.1 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.02$) と密 ($0.1 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.01 \rightarrow 0.004 \rightarrow 0.001$) の2系列とした。収束は極めて緩慢で、4) の ψ_{sep} の補正式 (5) の収束加束係数 ϵ については10という大きな値まで使用した。 $R=32$ の場合にパラメーターを上述の様に変えた時の収束状況の比較を図2に示した。 ψ_{sep} については高々0.004以内の差である。定常流の計算には $\epsilon=1/10$, $\Delta\psi_{sep}$ は精密な系列, ϵ として8の値を使用した。

図3 ψ_{sep} の収束性図4 流線 ($R=0$, 定常)図5 流線 ($R=32$, 定常)

上述のパラメーターの値の時、レイノルズ数を16, 32, 64, 96と変えて解を求めた。その時の収束の状況を図3に示したが、レイノルズ数が大きくなると収束はより緩かになり、 $R=96$ の場合には $n=20$ まで計算を続行した。 $R=0$ の場合はこの方法では解が求められないので、ストークスの方程式を定常法で直接解いた。 $R=0$ と $R=32$ の場合の流の様子を図4, 図5に示した。図6にこの計算によって得られた定常の場合の分流比 ψ_{sep} をレイノルズ数 R の関数として示した。 $R=0$ の時の分流比はこの計算では0.503となったが、0.500が多分正しい値であると思われる。 ψ_{sep} はレイノルズ数が増すとともにほぼ線形的に減少する。

§3.2 拍動流

拍動流については境界条件2)の代りに2')をとらねばならない。圧力勾配を

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\left\{A + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right\} \quad (6)$$

の様に仮定し、全流量 $\psi_{u.w.}$ が、分岐のない直管で

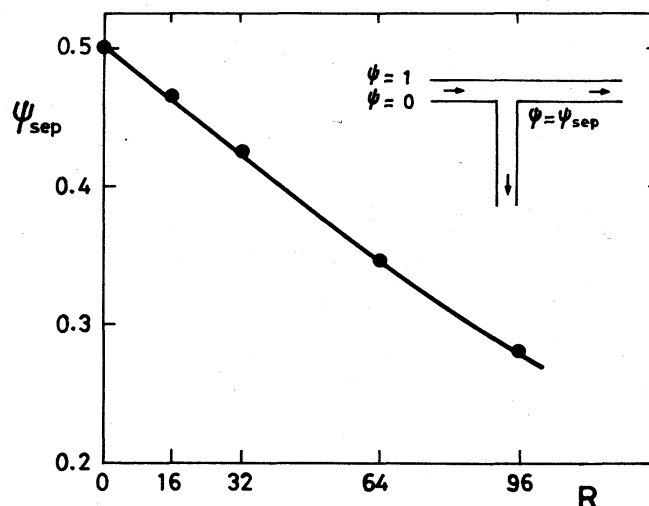


図6 ψ_{sep} と R との関係

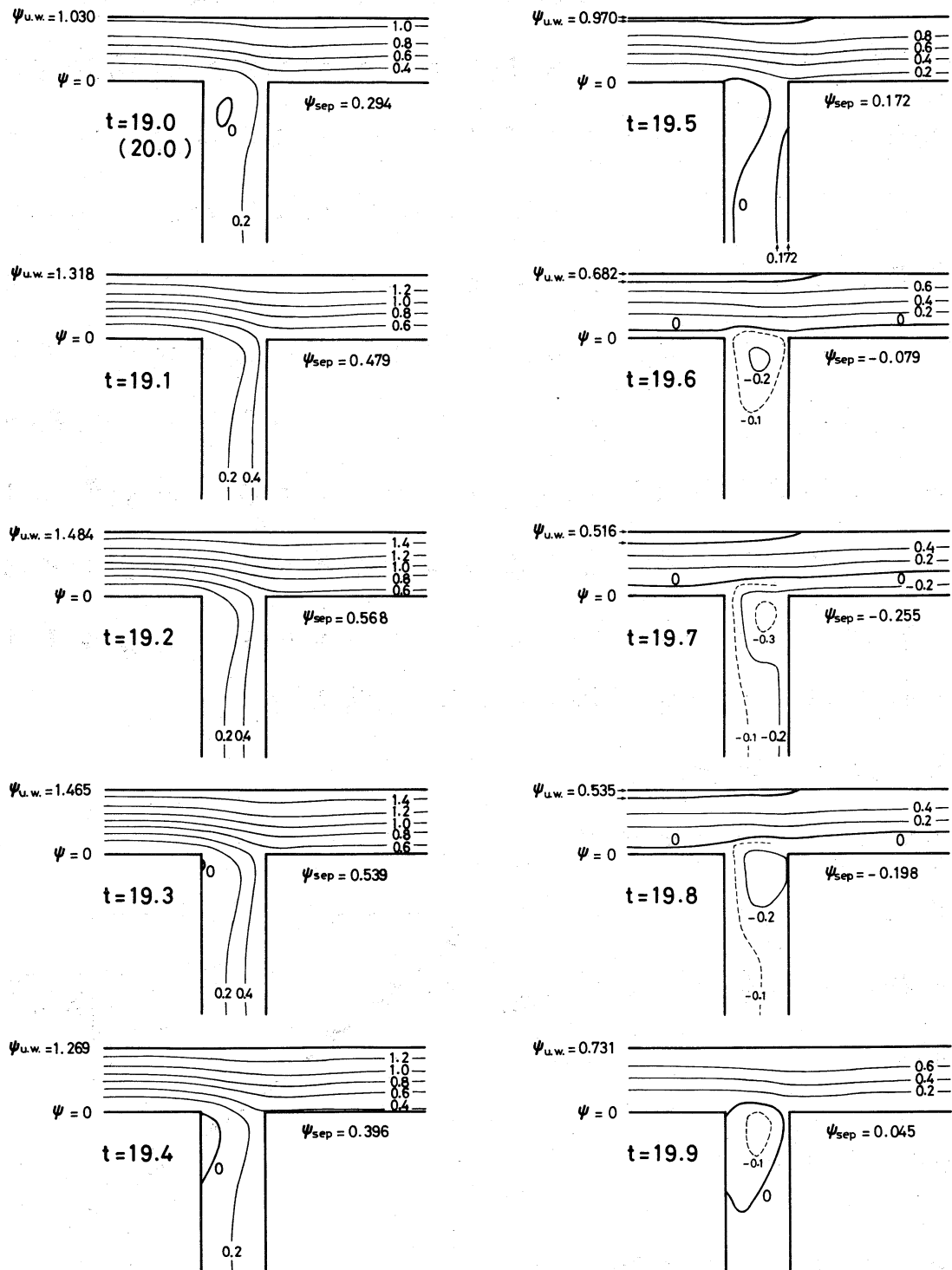


図7 流れの様子の一周期の変化 ($T=1$, $R=96$)

$$\psi_{u.w.} = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \quad (7)$$

となる様に A , B を定めた。 T は無次元周期である。 $A = 12/R$, $RB/12$ は $T = 1, 3, 10$ に対し, λ ぬ λ ぬ $9.25, 3.30, 1.13$ の値をとる。

周期 T が $1, 3, 10$ の3つの場合に, レイノルズ数が $32, 64, 96$ の場合を計算した。4)の収束加束係数 k は, $8, 4$ の値では発散したので, $k = 2$ とした。また, k は $1/10$, $\Delta\psi_{sep}$ は ψ_{sep} が変動することを考え, 粗い系列をとった。

一例として, $T = 1$, $R = 96$ の場合の流れの変化の様子を $1/10$ 周期ずつ ($t = 19 \sim 20$) を図7に示

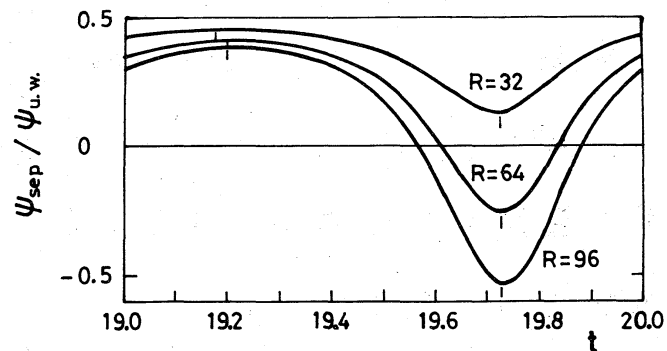


図8 分流比 ($T=1$)

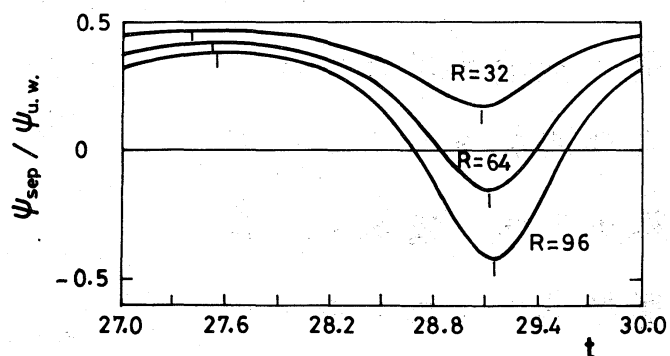


図9 分流比 ($T=3$)

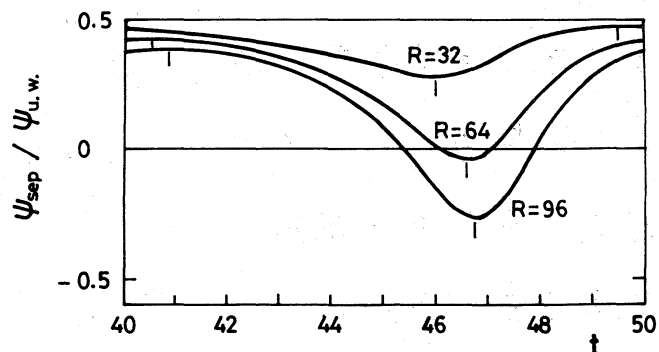


図10 分流比 ($T=10$)

した。 $t=19.6$ から 19.8 までは側管から直管へ流れが生じており、左側の壁面にくっついていた停留渦が離れだし、右側の壁につき、再び左側面に移る等流れの変化は激しいが、その他の時間では分流比を一定にした時とほぼ同様である。

側管の方に流れる流量の割合 $\psi_{sep}/\psi_{u.w}$ を時間の関数として、図8～10に示した。この割合の最低値は、ほぼ全体の流量が最低になる時刻の近くでおこる（図11参照）。レイノルズ数が64をこすと、

この割合が負になる。

すなわち、側管から直管への逆流がおこる。

この現象はレイノルズ数が大きい程強く、周期が大きくなると弱くなる。分流比 $\psi_{sep}/$

$\psi_{u.w.}$ を一定とした前の計算で準定常流と考えられた $T=10$ の場合でも、そんなに強くはないが逆流がおこっている。

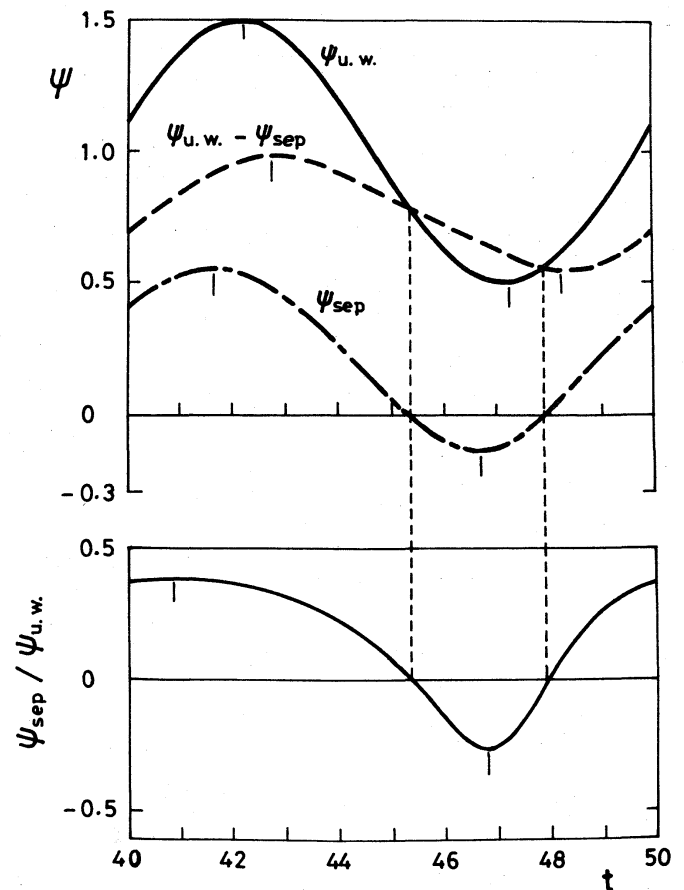


図11 全流量 $\psi_{u.w.}$, 直管の流量 $\psi_{u.w.} - \psi_{sep}$, 側管の流量 ψ_{sep} ($T=10, R=96$)

図11に1つの場合($T=10$, $R=96$)について, 全流量 $\psi_{u.w.}$, 直管への流量 $\psi_{u.w.}-\psi_{sep.}$, 側管への流量 $\psi_{sep.}$ の一周期にわたっての変動を示した。圧力勾配の最大は $t=40$ の時に, 全流量の最大は位相が 80° 遅れている。直管への流量の最大は全流量の最大より 18° 遅れ, 側管への流量最大は 22° 進んでいる。直管への流量の最小は全流量の最小より位相が 26° 遅れ, 側管では 21° 進んでいる。全体として, 直管内の流れは全流量に比べて変動の仕方が少ない。

従って側管内の流量の変動は大きく, 最小の時には側管から直管への逆流も生じている。 $T=10$ の場合は周期がかなり長く, 準定常とみなしてもよい様に思われるが, 準定常とすると側管への分流比 $\psi_{sep.}/\psi_{u.w.}$ は図6からわかる様に, 全流量最大の時には小さく, 流量最小の時には大きくなるなければならない。と

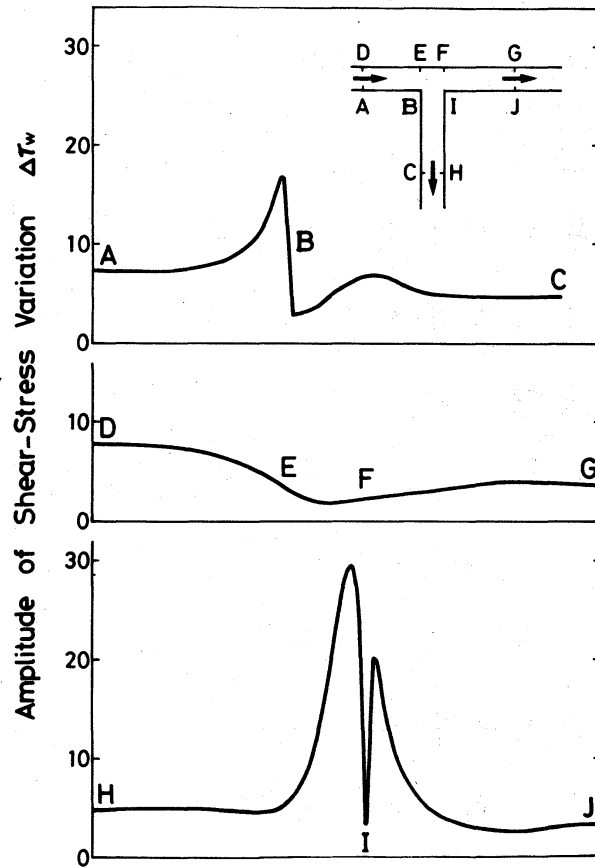


図12 壁上の剪断応力の振幅

($T=10$, $R=64$)

ころが、実際にえられた流れについてはこの割合は全く逆の傾向を示し、逆流まで生じているので、準定常と考えることはできない。このようなことは、直管を流れる流体のもつエネルギーが側管のものに比べて格段に大きく、その慣性がひきおこしたものと考えられる。

図12には、 $T=10$ 、 $R=64$ の場合に、壁面上の剪断応力の時間的变化の振幅を示したが、分流比を一定にした場合と大した違いはない。

図13には、側管への流量を一周期にわたって平均したもの $\overline{\psi_{sep}}$ をレイノルズ数の関数として示した。定常流の場合も参考のため再録した。レイノルズ数が増えるに従い側管への流量が減少してゆく傾向は、拍動流の場合も定常流の場合と同じであるが、周期が短くなるに従いこの傾向は強くなる。 $T=10$ の場合でも準定常とみ

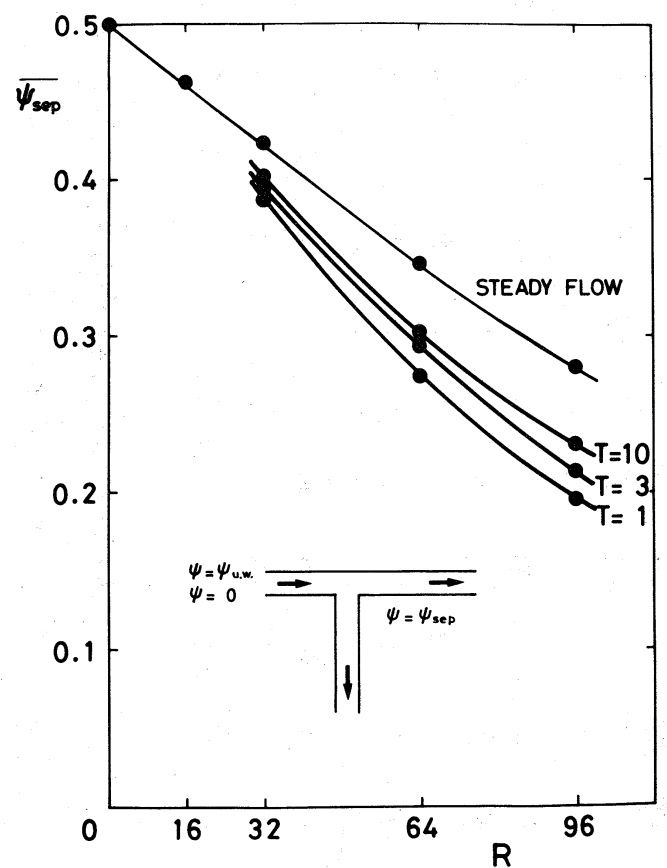


図13 側管への平均流量 $\overline{\psi_{sep}}$

なせないことが明らかに示されている。

§ 4. 結語

下流部分が有限の長さをもつ分岐チャンネル内の流れを、両下流端での圧力が等しいという条件のもとに、定差法で数値的に解き、次の様な結論を得た。

1) 定常流の場合にはレイノルズ数が増すに従い側管への流量は減少する。

2) 拍動流の場合にもこの傾向は同じであるが、周期が短くなるにつれてこの傾向は強まる。

3) レイノルズ数が大きくなると、全流量が最小となる時の近くで側管から直管への逆流が見られる。周期がかなり長くなっても逆流は存在する。

4) かなり周期が長くなっても、準定常とみなすことはできない。

この数値計算には慶応義塾大学日吉地区に設置の FACOM M-180 IIAD を使用した。必要とした計算時間は、定常流の場合、 $\epsilon=1/10$ の計算で 3~4 分、 $\epsilon=1/20$ では 1~2 時間、拍動流の場合では $\epsilon=1/10$ として 7~32 分であった。

文献

- 1) 川口, 渡野; 堰を過ぎる 2次元拍動流—動脈の狭窄後膨張の 2次元モデル. なかれ 7 巻 4 号 (1975) 19-25.
- 2) 川口, 渡野; 分岐流の数値計算. 京大数理解析研究所講究録 16393 (1980) 184~197.